

Úlohy do předmětu OPT/MF

Miroslav Gajdacz

26. května 2010

1 Elektricky vodivá koule v homogenním poli

1.1 Zadání úlohy

Elektroneutrální vodivá koule je umístěna ve vnějším stacionárním homogenním elektrickém poli. Určete rozložení náboje na povrchu koule a celkový dipólový moment koule.

1.2 Úvaha

Po vložení vodiče to elektrického pole se volné nosiče náboje ustálí v takové rovnovážné poloze, aby na každý z nich působila nulová výslednice elektrické síly. Volné náboje uvnitř vodiče nejsou nijak omezovány v pohybu, takže aby se nehýbaly, musí být uvnitř vodiče nulové elektrické pole. K tomu může dojít odstíněním vnějšího elektrického pole náboji indukovanými na povrchu vodiče. Uvnitř vodiče musí nutně být nulová hustota náboje.

Povrch vodiče zabraňuje úniku nábojů z vodiče (neuvažujme sršení nábojů). Uvažujme infinitezimální element plochy dS s nábojem $dq = \sigma dS$, kde sigma je hustota náboje. Na náboj dq musí působit nulová elektrická síla ve směru tečném k povrchu vodiče, jinak by se náboj dal v tomto směru do pohybu. Kolmo k povrchu směrem ven z vodiče však může působit libovolně velká elektrická síla, protože je vždy vyvážena „mechanickou“ silou reakce povrchu vodiče. Z toho vyplývá, že hustota náboje na povrchu vodiče je přímo úměrná normálové složce vnějšího elektrického pole v daném bodě plochy.

Plošná hustota náboje dále závisí na zakřivení povrchu, to je však pro kouli všude stejné.

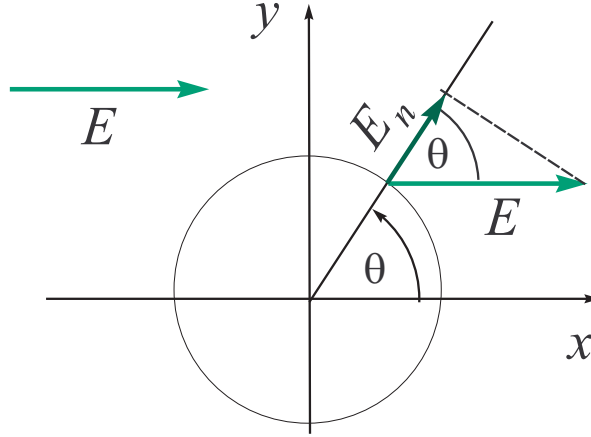
1.3 Řešení

Zavedem-li kartézskou vztažnou soustavu s počátkem ve středu koule a elektrické pole orientujeme ve směru osy x , pak z obrázku 1 vyplývá pro normálovou složku

$$E_n = E \cos \theta, \quad (1)$$

kde θ je úhel mezi průvodičem plošky dS a osou x . Podle úvahy 1.2 vyplývá pro plošnou hustotu náboje

$$\sigma = A \cos \theta, \quad (2)$$



Obrázek 1: Koule v homogenním elektrickém poli a normálová složka vektoru elektrické intenzity.

kde A je nějaká konstanta, jejímž určením nalezneme rozložení náboje na povrchu koule.

Konstantu A můžeme určit z podmínky nulovosti elektrického pole uvnitř koule. Speciálně pro střed koule platí

$$\vec{E}_{celk} = \vec{E} - \int_S \frac{\vec{r}\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 0, \quad (3)$$

kde \vec{E} je elektrická intenzita vnějšího pole, R je poloměr koule a S značí integraci přes celou plochu koule.

Z nulovosti y -ové a z -ové složky pole uvnitř koule nedostaneme žádnou informaci, ale z nulovosti x -ové komponenty plyne

$$\frac{A}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta = E, \quad (4)$$

kde jsme dosadili z (2) a uvažili jsme

$$dS = R^2 \sin\theta d\phi d\theta; \quad (5)$$

$$\left(\frac{\vec{r}}{R}\right)_x = \cos\theta. \quad (6)$$

První intergrál v (4) je roven 2π , pro druhý substitucí $\cos\theta = u$ dostaneme $\frac{2}{3}$ a vyjádříme

$$\sigma = A \cos\theta = 3\epsilon_0 E \cos\theta. \quad (7)$$

Pro x -ovou složku dipólového moment $\vec{p} = \int_S \vec{r} dq$ pak dostaneme jednoduše

$$p_x = \int_S R \cos\theta \sigma dS = 3\epsilon_0 E R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta = 4\pi\epsilon_0 E R^3. \quad (8)$$

Ostatní komponenty dipólového momentu jsou ze symetrie nulové. Vidíme, že dipólový moment vodivé koule v homogenním poli je přímo úměrný objemu koule.

2 Chladnutí koule

2.1 Zadání úlohy

Řešte rovnici vedení tepla při chladnutí homogenní koule v okolí s konstantní teplotou.

2.2 Řešení

Abychom byli schopni nalézt analytické řešení rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u, \quad (9)$$

předpokládejme ideálně vodivé okolí o teplotě T_0 . Rozepišme explicitně rovnici (9) ve sférických souřadnicích, přičemž uvažíme sférickou symetrii teploty koule, tedy $u \equiv u(r, t)$. Pak můžeme psát

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (10)$$

kde D je konstanta tepelné difuzivity definovaná jako

$$D = \frac{k}{c\rho}, \quad (11)$$

k je tepelná vodivost, ρ je hustota a c je tepelná kapacita daného materiálu.

Najdeme nyní všechna řešení tvaru

$$u(r, t) = \nu(r)\tau(t). \quad (12)$$

Dosazením (12) do (10) dostaneme

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{D}{\nu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\nu}{dr} \right) = -\mu^2 = \text{konst.} \quad , \quad (13)$$

kde μ je reálná konstanta. Řešení časové části je

$$\tau = Ae^{-\mu^2 t}, \quad (14)$$

kde A je nějaká konstanta. Pro nalezení řešení prostorové části užijeme substituce

$$\nu = \frac{z}{r} \quad (15)$$

a vyjádříme Laplaceův operátor

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\nu}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{dz}{dr} r - z \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 z}{dr^2}. \quad (16)$$

Dosazením (16) do (13) získáme

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{\mu^2}{D} z = 0, \quad (17)$$

což je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu, jenž má řešení tvaru

$$z = B \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}r\right) + C \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}r\right). \quad (18)$$

Řešení rovnice (10) hledáme na intervalu $r \in \langle 0, R \rangle$. Z podmínky nulovosti toku tepla ve středu koule

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d}{dr} \left(\frac{z}{r} \right) = 0 \quad (19)$$

plyne $C = 0$. Nechtě je u_1 nějakým řešením rovnice (10). Jelikož v této rovnici nevystupují derivace nultého řádu, je jejím řešením i každá funkce tvaru $u_2 = u_1 + K$, kde K je libovolná konstanta. Zvolme tedy konstantu K tak, abychom mohli položit okrajovou podmínku

$$\left(\frac{z}{r} \right) \Big|_{r=R} = \frac{B \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{D}}R\right)}{R} = 0, \quad (20)$$

tedy $K = T_0$. Z podmínky (20) plyne

$$\mu = \frac{\sqrt{D}n\pi}{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Obecné řešení rovnice (10) můžeme zapsat jako superpozici řešení tvaru (12) a sice

$$u(r, t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{r} \sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right) e^{-\frac{Dn^2\pi^2}{R^2}t}, \quad (22)$$

kde koeficienty a_n určíme z počáteční podmínky

$$u(r, 0) - T_0 = \Delta T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{r} \sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right). \quad (23)$$

Rovnici (23) vynásobíme $r \sin\left(\frac{m\pi}{R}r\right)$ a zintegrujeme podél $\langle 0, R \rangle$. S uvažováním ortogonality vzájemně harmonických funkcí tak můžeme psát

$$\int_0^R \Delta T r \sin\left(\frac{m\pi}{R}r\right) dr = a_m \int_0^R \sin^2\left(\frac{m\pi}{R}r\right) dr = \frac{1}{2} R a_m. \quad (24)$$

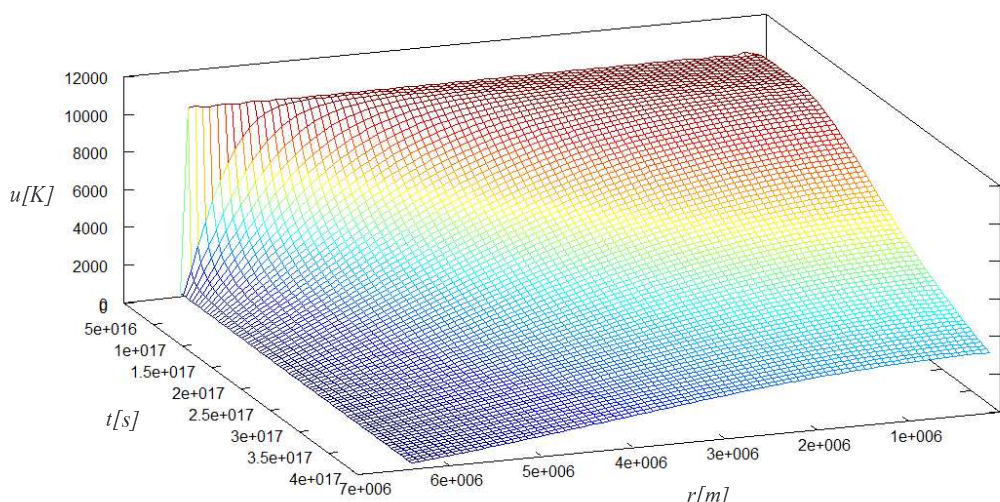
Dopočtením prvního intergálu dostaneme

$$a_m = (-1)^{m+1} \frac{2\Delta T R}{m\pi} \quad (25)$$

a můžeme tak psát finální řešení jako řadu

$$u(r, t) = T_0 + \Delta T \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right) e^{-\frac{Dn^2\pi^2}{R^2}t}. \quad (26)$$

Tato funkce je funkcí dvou proměnných. Můžeme ji vykreslit jako plochu v trojrozměrném prostoru, například pomocí programu Octave/Matlab. Použitý zdrojový kód v jazyce Octave je přiložen v textovém souboru `chladnuti.m`. Pro konkrétnost jsme za R dosadili poloměr zeměkoule (6378km) a za D tepelnou difuzivitu železa ($2 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$). Počáteční teplota byla 10000K a teplota okolí 200K. Výsledná plocha je uvedena na obrázku 2.



Obrázek 2: Vývoj teploty v průběhu chladnutí zeměkoule.

3 Vodič v stacionárním elektrickém poli – numerická simulace

3.1 Zadání úlohy

Sestavit program pro simulaci působení stacionárního elektrického pole na náboje ve vodiči ve 3D.

3.2 Řešení

Zdrojový kód v jazyce Octave (s bohatým komentářem v anglickém jazyce) je uveden v příloženém textovém souboru `elstat.m`. Při tvorbě programu byl kladen důraz na modifikovatelnost a univerzalitu. Proto je program sekvencován do velkého počtu krátkých funkcí, jež obstarávají jednotlivé úkony. Vodičivé těleso bylo modelováno jako elipsoid s nastavitelnými poloosami orientovanými ve směru souřadnicových os.

Tělo programu začíná inicializací, při níž se vygeneruje určitý počet rovnoměrně rozmístěných bodů z vnitřku tělesa. Na pozice těchto bodů se stabilně umístí kladné náboje, a rovněž nám tyto body poslouží jako počáteční polohy pohyblivých záporných nábojů. I když je v našem případě těleso jako celek elektroneutrální, dal by se program lehce modifikovat i pro nabitý vodič a to tak, že bychom přidali nebo ubrali nějaké záporné náboje.

Jádro programu tvoří jednoduchá smyčka se čtyřmi příkazy. Nejdříve se zjistí elektrická síla na pozici každého negativního náboje. Potom se spočte z této síly vyplývající změna rychlosti pro každý elektron. Následuje přemístění nábojů podle této rychlosti s přihlédnutím k omezení, které na pohyb klade plocha vodiče a vše je zakončeno odesláním relevantních dat na grafický a souborový výstup z programu. Nyní máme negativní náboje na nových pozicích a můžeme smyčku opakovat.

Elektrická síla na negativní náboj se spočte jako superpozice vnějšího pole a elektrických intenzit vytvořených ostatními náboji. K ošetření singularity v případě blízkosti elektronu k pozitivnímu bodovému náboji můžeme užít místo Coulombovy síly interakci plynoucí z nahrazení kladného náboje homogenně nabitou koulí (lineární závislost elektrické intenzity napodobuje chování dielektrika) nebo přímo nulovou interakcí (plyn volných elektronů v kovu).

Při výpočtu rychlosti pohybu elektronů můžeme uvážit hned několik vlivů. Jednak můžeme uměle nastavit maximální délku kroku jako násobek $a(1 - e^{-\lambda|\vec{E}|})$, kde kladnou konstantou λ můžeme regulovat tuhost kroku a a je maximální délka kroku. Zároveň můžeme započíst vliv setrvačnosti pohybu a disipace energie pohybem nábojů v prostředí s nenulovým odporem tím, že k rychlosti plynoucí z elektrické intenzity přičteme určitý zlomek rychlosti z předchozího kroku.

Omezení pohybu vlivem povrchu vodiče je provedeno tak, že v případě kdy rychlost náboje způsobí jeho přemístění mimo těleso, provedeme pohyb zpět těsně pod povrch a to ve směru normály k povrchu vodiče. Normálový směr v daném místě určíme jako gradient rovnice kvadriky (elipsoidu), jenž nám definuje povrch tělesa.

Program umožňující implementovat složitější tvary těles (kvádry, mnohostěny, hypebolické plochy,...) by se výhodně sestavil užitím objektově orientovaného programování například pomocí jazyka C++. Tam bychom mohli definovat těleso jako průnik poloprostorů ohraničených geometrickou plochou a organizovat jednotlivé hranice (definované jako funkce neboli objekty) do datového pole, na které bychom se později mohli odvolávat v iterativních cyklech.

Samozřejmě, že by se tato úloha dala řešit i užitím klasického programování. Možná bychom však měli problémy s modifikovatelností programu.

4 Kontakt

E-mail: *miroslav.gajdacz@seznam.cz*